ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1985

DEUXIEME INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans la rédaction de leurs copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer chacun des résultats correspondant aux éléments encadrés dans les énoncés, et ceux-ci seulement.

SUJET N°1

Pour tout entier $n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, et tout réel a , $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-t} \cos^n t \cdot dt \quad , \quad C(a) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cos at \cdot dt \ .$$

1– Démontrer la convergence des intégrales généralisées (ou impropres) I_n et $C(a)$.

Calculer $\boxed{C(a)}$ par une formule très simple.

2 – Calculer $\boxed{I_0}$, $\boxed{I_1}$, $\boxed{I_2}$.

3– Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer l'existence d'une relation de récurrence du type :

$$I_n = A(n) \cdot I_{n-2} + B(n) \ ,$$

où $\boxed{A(n)}$ et $\boxed{B(n)}$ sont des fractions rationnelles en n que l'on déterminera .

4– En utilisant la relation précédente , ou autrement , dresser une table des valeurs de I_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. On mettra I_n sous la forme d'une fraction irréductible , $I_n = p_n / q_n$, où p_n et q_n sont des entiers > 0 premiers entre eux, et l'on disposera les résultats sous la forme d'un tableau :

n	p_n	q_n
1		
2		
⋮		
8		

5 – Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \cdot dt$. Démontrer brièvement que $\lim_{n\to\infty} W_n = 0$.

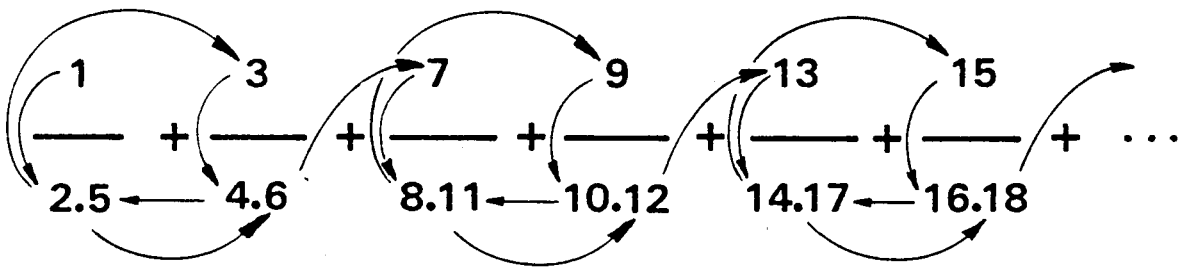
On pose alors $J_n = \int_0^{\pi} e^{-t} \cdot \cos^n t \cdot dt$. Montrer l'existence d'une suite $\boxed{u_n}$, périodique de période 2 telle que $I_n = u_n \cdot J_n$. En déduire la valeur de $\boxed{\ell}$ telle que $\ell = \lim_{n\to\infty} I_n$.

SUJET N°2

L'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers > 0 est utilisé pour créer le terme général u_n d'une série selon la procédure périodique suivante , que l'on poursuit indéfiniment :

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{3}{4\cdot 6} + \frac{7}{8\cdot 11} + \frac{9}{10\cdot 12} + \frac{13}{14\cdot 17} + \frac{15}{16\cdot 18} + \ldots$$

Cette procédure , si l'on préfère , peut être schématisée par le système périodique de fléchage ci-dessous :



Ainsi , $u_1 = \frac{1}{2\cdot 5}$, $u_2 = \frac{3}{4\cdot 6}$, $u_3 = \frac{7}{8\cdot 11}$, $u_4 = \frac{9}{10\cdot 12}$ etc .

1 – Exprimer le terme général u_n , en distinguant les valeurs de $\boxed{u_{2k-1}}$ et $\boxed{u_{2k}}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

2 – Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3 – On pose $w_k = u_{2k-1} - u_{2k}$. Déterminer des constantes $\boxed{A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D}$, telles que :

$$w_k = \frac{A}{6k-4} + \frac{B}{6k-2} + \frac{C}{6k-1} + \frac{D}{6k} \quad .$$

4 – On pose $W_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$. Montrer que :

$$W_n = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{P(t)}{Q(t)}\,(1 - t^{6n})\,dt \quad ,$$

où $Q(t) = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5$, et $\boxed{P(t)}$ est un certain polynôme que l'on calculera. Pour ce faire, on pourra utiliser l'égalité : $\frac{1}{a} = \int_0^1 t^{a-1}\,dt$, $a > 0$.

5 – La formule précédente montre que la valeur de la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ est donnée par $\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt$ et que le reste d'ordre n a pour expression :

$$R_n = \sum_{q=n+1}^{\infty} w_q = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{6n}\,\frac{P(t)}{Q(t)}\,dt \quad .$$

Donner un équivalent simple de R_n pour $n \to +\infty$, au moyen d'une intégration par parties.

SUJET N° 3

Pour tout réel θ , non multiple de π ($\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) , on pose :

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$$

1 – Décomposer la fraction rationnelle f en éléments simples sur le corps des complexes $\mathbb{C}$.

2 – En déduire, sous forme complexe, l'expression de la dérivée d'ordre n , soit $\boxed{f^{(n)}(x)}$.

3 – Montrer que

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 - 2x\cos\theta + x^2)^{n+1}}$$

où P_n est un polynôme de degré n . On calculera les coefficients $\boxed{a_{n,k}}$, ainsi définis :

$$\frac{1}{n!} P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^{n-k} ,$$

par une formule utilisant les coefficients binomiaux et les fonctions $S_k(\theta) = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$

4 – Déterminer la valeur de $\boxed{\lambda} = \lim_{\theta \to 0} a_{n,k}(\theta)$. Etait-ce prévisible ? Pourquoi ?

5 – Revenant au cas où $\theta \not\equiv 0$, mod π , montrer que P_n possède n racines réelles distinctes dont on donnera l'expression.

SUJET N° 4

1 – Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer le module de $\cos^2 z$, soit $|\cos^2 z|$, par une formule n'utilisant que $\cos x$ et $\operatorname{sh} y$.

2 – Ceci fait, préciser l'ensemble E des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels $|\cos^2 z| < 1$. On fera un dessin en se limitant à la période $x \in [0, \pi]$.

3 – On considère la série de fonctions

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cos^{2n} z \cdot \sin^6 z$$

Déterminer l'ensemble F des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels elle converge

4 – Mettre $f(z)$ sous une forme extrêmement simple, soit $g(z)$, en utilisant la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} nu^n$ quand $|u| < 1$.

5 – Montrer que $g(z)$ admet un développement en série entière de la forme

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Préciser la valeur de a_n . Comparer l'ensemble G de convergence de cette série , $G \subset \mathbb{C}$, à l'ensemble F étudié précédemment.

SUJET N° 5

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles **bornées** . Pour toute suite $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$, on rappelle que l'expression :

$$N_1(u) = \sup_{n \geqslant 0} |u_n|$$

définit une norme sur E , cette propriété n'étant pas à redémontrer.

1 – A toute suite $u \in E$, on associe la fonction f_u de la variable réelle t , définie par la série :

$$f_u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \, t^n (1-t) \quad , \text{ quand elle converge .}$$

Comparer, au sens de l'inclusion , l'ensemble de définition de f_u , soit D_u , avec le segment $[0,1]$.

2 – On pose

$$N_2(u) = \sup_{t \in [0,1]} |f_u(t)| \quad .$$

Montrer que N_2 est une norme sur E . On précisera bien le raisonnement par lequel

$(N_2(u) = 0) \Rightarrow$ (u est la suite nulle).

3 – Calculer $\boxed{N_2(u)}$ pour la suite particulière u , telle que

$$u_n = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

4 – Pour tout entier $k \geqslant 0$, on définit la suite $v^{(k)}$, par $v_n^{(k)} = 0$ si $n \neq k$, et $v_k^{(k)} = 1$.

Calculer $\boxed{N_2\left(v^{(k)}\right)}$

5 – Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?